数理解析研究所講究録
473巻 1982年 86-95

双有理整拡大と微分加群

阪大 理　　吉田寛一

RIMS 講究録 446 において次の結果を述べた。

命題　R をネーター的整域，A を R 上の拡大環で，R とは双有理かつ R-加群として有理生成とする。このとき，${}_A^+R$（R の A の中での seminormalization）は A の glueing によって得られる。今 $A = {}_A^+R$ と仮定する。

$$d: A \longrightarrow \Omega_R(A)$$

を A から，A の R 上の微分加群への R-homomorphism において，$d^{-1}(0) = C_1$ は A と R の中間環となる。C_1 に対しても同様にして，C_2 を作るとき，${}^\exists d$: integer で $C_d = R$ となる。

これは glueing は点の接合に対応し，$d^{-1}(0)$ は接平面(高次の)

における制限を意味すると考えられる。

$A = {}^{+}_{A}R$ の条件を満たすとき，RはAの中で cusp type と言おう。

さて先の命題では cusp type は有限列の微分加群による不変部分環として得られることを述べたが，これの逆はどうであろうか？ すなわち RはAの中で cusp type とは限らぬとして，$B = d^{-1}(0)$，$d : A \longrightarrow \Omega_R(A)$，とすれば，BはAの中で cusp type であるか？ 接平面での制限を与えるだけなので成り立っているとおもうが，ここでは，Rが標数0の係数体kをもつ場合にのみ示す。

以下では，$d^{-1}(0) = R$ とする。

命題1. $d^{-1}(0) = R$ のとき，$\mathrm{Ass}_R \Omega_R(A) = \mathrm{Ass}_R A/R$。

証明. d を integer として，d に関する帰納法を用いて示す。

R-加群として，$A/R \hookrightarrow \Omega_R(A)$ であるから，

$\mathrm{Ass}_R A/R \subseteq \mathrm{Ass}_R \Omega_R(A)$ である。そこで

$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$，$\mathrm{ht}\, \mathfrak{p} \leq d$ かつ $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R \Omega_R(A)$ ならば，

$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R A/R$ が成り立つとすれば，

$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = d+1$ で $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R \Omega_R(A)$ ならば $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R A/R$ が成り立つ事を示す。

$d=1$ のとき, $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$ で今 $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass}_R A/R$ とすれば, $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{c}(A/R)$, A/R の conductor ideal. よって, $R_{\mathfrak{p}} \supseteq A$ を得る。そこで $A_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$ だから $\Omega_R(A) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} = \Omega_{R_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}) = (0)$. これは $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass}_R \Omega_R(A)$.

よって, $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$ で $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R \Omega_R(A)$ であれば, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R A/R$ が示された。すなわち $d=1$ のとき,成立.

d に対しての帰納法を使う。

$F := \{ \alpha \in A \mid \operatorname{ht} I_\alpha \geqq d+1 \}$ とおく。ここで, I_α は α の分母イデアルである。F は A と R の中間環である。$d' : A \longrightarrow \Omega_F(A)$ において, $d'^{-1}(0) = F$ である。実際, $\supseteq$ は明らか。逆を示す.

$$(*) \qquad \Omega_R(F) \otimes_R A \longrightarrow \Omega_R(A) \longrightarrow \Omega_F(A) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

今 $\alpha \in A$ が $d'(\alpha) = 0$ とすれば, ${}^\exists \beta_i \in A$, ${}^\exists \gamma_i \in F$ で $d(\alpha) = \sum \beta_i d\gamma_i$. $d^{-1}(0) = R$ 故 $\operatorname{Ann} d\gamma_i = I_{\gamma_i}$, よって $\bigcap \operatorname{Ann} d\gamma_i = \bigcap I_{\gamma_i} =: \mathfrak{a}$ とすれば, $\operatorname{ht} \mathfrak{a} \geqq d+1$ を得る。これから $I_\alpha = \operatorname{Ann} d\alpha \supseteq \mathfrak{a}$ 故 $\operatorname{ht} I_\alpha \geqq d+1$ となり, $\alpha \in F$.

$\Delta := \{ \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R\, A/R \mid \mathrm{ht}\,\mathfrak{q} \leqq d \}$ とおく。

$\mathfrak{q} \in \Delta$ とすれば，$\mathrm{ht}\,\mathfrak{c}(F/R) \geqq d+1$ 故 $\mathfrak{q} \not\supseteq \mathfrak{c}(F/R)$。

よって $R_{\mathfrak{q}} \supseteq F$，$\mathfrak{P} = \mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} \cap F$ とおく。

$\Delta' := \{ \mathfrak{P} \mid {}^{\exists}\mathfrak{q} \in \Delta,\ \mathfrak{P} = \mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} \cap F \}$ とおく。

このとき，$\mathrm{Ass}_F\, A/F = \Delta'$ である。実際，$\Delta' \ni \mathfrak{P}$ とすれば，${}^{\exists}\mathfrak{q} \in \Delta$ で $\mathfrak{P} = \mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} \cap F$。$\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R\, A/R$ 故，${}^{\exists}\alpha \in A$ で $\mathfrak{q} = I_\alpha$。よって $R/\mathfrak{q} \hookrightarrow A/R$，ここで $\otimes_R R_{\mathfrak{q}}$ から $R_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} \hookrightarrow A_{\mathfrak{q}}/R_{\mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{P}}$ $\because R_{\mathfrak{q}} = F_{\mathfrak{P}}$.

よって，$R_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} = F_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}F_{\mathfrak{P}} \hookrightarrow (A/F)\otimes_F F_{\mathfrak{P}}$ 故 $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}_F\, A/F$ を得る。

逆に $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}_F\, A/F$ とすれば，${}^{\exists}\alpha \in A$ で，$I_{F,\alpha} = \mathfrak{P}$，($I_{F,\alpha}$ は α の F 上での分母イデアル)，$\mathfrak{P} \cap R = \mathfrak{q}$ とおく。今 $\mathrm{ht}\,\mathfrak{q} \geqq d+1$ とすれば，$\mathfrak{q}\alpha \subseteq F$ から $\alpha \in F$，これはあり得ないので $\mathrm{ht}\,\mathfrak{q} \leqq d$。従って $R_{\mathfrak{q}} = F_{\mathfrak{P}}$，そして，$F/\mathfrak{P} \hookrightarrow A/F$ から $R_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}} \hookrightarrow A_{\mathfrak{q}}/R_{\mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{q}}/F_{\mathfrak{q}}$

よって，$\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R\, A/R$。

以上から $\mathrm{Ass}_F\, A/F$ の各元は $\mathrm{ht} \leqq d$ 故帰納法の仮定から $\mathrm{Ass}_F\, A/F = \mathrm{Ass}_F\, \Omega_F(A)$.

$\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R\, \Omega_R(A)$ を $\mathrm{ht}\,\mathfrak{q} = d+1$ とする。今 $\mathfrak{q} \notin \mathrm{Ass}_R\, A/R$ とする。$\mathfrak{q} \geqq \mathfrak{c}(F/R)$ とすれば，$\mathrm{ht}\,\mathfrak{q} = d+1$ で $\mathrm{ht}\,\mathfrak{c}(F/R)$

$\geqq d+1$ 故 $\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{d}(F/R)$ の minimal prime divisor, このとき ([3], 1-1) から $\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_R\, A/R$ を得るが, 今 $\mathfrak{z} \notin \mathrm{Ass}_R\, A/R$ としたので, $\mathfrak{z} \not\supset \mathfrak{d}(F/R)$ である。よって, $R_{\mathfrak{z}} = F_{\mathfrak{z}}$, だから $\Omega_{R_{\mathfrak{z}}}(F_{\mathfrak{z}}) = (0)$。(*) の exact sequence に $\otimes_R R_{\mathfrak{z}}$ すれば,

$$\Omega_{R_{\mathfrak{z}}}(A_{\mathfrak{z}}) \cong \Omega_{F_{\mathfrak{z}}}(A_{\mathfrak{z}})$$

ところが $\mathrm{Ass}_F\, \Omega_F(A) = \mathrm{Ass}_F\, A/F \not\ni \mathfrak{z}R_{\mathfrak{z}} \cap F$, これは $\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_R(A)$ に反する。よって $\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_R\, A/R$.

最後に $R = d^{-1}(0)$ であれば R は A の中で cusp type である事を示す。

定理. R は標数 0 の体 k を含むものとする。$\dim R < +\infty$。A を R 上双有理な拡大で, A は R-加群として有限生成とする。今 $d^{-1}(0) = R$, $d : A \longrightarrow \Omega_R(A)$, であれば, R は A の中で cusp type である。

証明。R が A の中で cusp type であるための必要十分条件は, $\mathrm{Spec}\, A \longrightarrow \mathrm{Spec}\, R$ が bijective で, 対応する residue fields が一致している事である。そこで B を A と R の中間環とすれば, R が A の中で cusp type である事を示すためには, R が B の中で, B が A の中でそれぞれ

cusp type であればよい。

$\mathrm{Ass}_R\, A/R = \{\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_t\}$, $\mathrm{ht}\,\mathfrak{q}_i \leq \mathrm{ht}\,\mathfrak{q}_{i+1}$, とする。この時, $B_i := \{\alpha \in A \mid I_\alpha \not\subset \mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_i\}$ とおけば, 各 B_i は A と R の中間環で, $A = B_0 \supsetneq B_1 \supsetneq \cdots \supsetneq B_t = R$ である。そして $\mathfrak{q}_i \notin \mathfrak{A}(B_i/R)$ から $R_{\mathfrak{q}_i} \supseteq B_i$, $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{q}_i R_{\mathfrak{q}_i} \cap B_i$ とおけば, $\mathrm{Ass}_{B_i}\, B_{i-1}/B_i = \{\mathfrak{P}_i\}$ である。従って, B_i が B_{i-1} の中で cusp type である事を示せればよいが, 先の命題の証明と同様にして, $d_{i-1}: B_{i-1} \longrightarrow \Omega_{B_i}(B_{i-1})$ において, $d_{i-1}^{-1}(0) = B_i$ を得る。以上から, 我々は, $\mathrm{Ass}_R\, A/R = \{\mathfrak{q}\}$ の場合に帰着する事が出来る。

R が A の中で cusp type である事を示すために ([3], Prop 3.2) を使おう。便利のために, 示すべき事を書き出してみると,

(i) $\mathfrak{q}$ 上の A の prime ideals はただ1つ。それを $\mathfrak{P}$ とおけば

(ii) $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{P}$ の residue fields は一致, $\mathfrak{q}$ の residue field を $k(\mathfrak{q})$ と書く。

(iii) $R/\mathfrak{q}$ は $A/\mathfrak{P}$ の中で cusp type。

以上の3つである。

(i) を示す。$\mathfrak{z}$ 上の A の prime ideals を $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_\ell$ とする。今 $\ell \geqq 2$ とする。$A_\mathfrak{z}$ と $R_\mathfrak{z}$ においても，$\mathfrak{z}R_\mathfrak{z}$ 上の $A_\mathfrak{z}$ の素イデアルは $\mathfrak{P}_i A_\mathfrak{z}$ であり，$d_\mathfrak{z} : A_\mathfrak{z} \longrightarrow \Omega_{R_\mathfrak{z}}(A_\mathfrak{z})$ において，$d_\mathfrak{z}^{-1}(0) = R_\mathfrak{z}$ である。($\because$ $\mathrm{Ass}_R A/R = \mathrm{Ass}_R \Omega_R(A) = \{\mathfrak{z}\}$)

conductor ideal $\mathfrak{c}(A_\mathfrak{z}/R_\mathfrak{z}) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_\ell$，$Q_i$ は $\mathfrak{P}_i A_\mathfrak{z}$ に属する primary ideal，の分解が与えられ，$Q_i \subsetneqq \mathfrak{P}_i A_\mathfrak{z}$ である。従って，$A_\mathfrak{z}/\mathfrak{c}(A_\mathfrak{z}/R_\mathfrak{z}) = A_\mathfrak{z}/Q_1 \times \cdots \times A_\mathfrak{z}/Q_\ell \supseteqq k \times \cdots \times k$ を得る。よって，$A_\mathfrak{z}$ の元 α で $\alpha - 1 \in Q_1$，$\alpha \in Q_2 \cap \cdots \cap Q_\ell$ となるものが存在する。$\alpha(\alpha-1) \in \mathfrak{c}(A_\mathfrak{z}/R_\mathfrak{z}) \subsetneqq R_\mathfrak{z}$ 故 $d_\mathfrak{z}(\alpha(\alpha-1)) = (2\alpha-1)d_\mathfrak{z}\alpha = 0$，そして $2\alpha-1$ は $A_\mathfrak{z}$ の unit なので，$d_\mathfrak{z}\alpha = 0$ $\therefore$ $d_\mathfrak{z}\alpha = 0$ より，$\alpha \in R_\mathfrak{z}$ であるが，$\alpha \in R_\mathfrak{z}$ とすれば α は $A_\mathfrak{z}/\mathfrak{c}(A_\mathfrak{z}/R_\mathfrak{z})$ で diagonal に入るので矛盾，$\therefore$ $\ell = 1$ である。$\mathfrak{z}$ 上の A の素イデアルを $\mathfrak{P}$ とする。

(ii) を示す。$A_\mathfrak{P}/\mathfrak{c}(A_\mathfrak{P}/R_\mathfrak{z})$ は local Artin 環で，係数体 k を含むので，Cohen の構造定理によって，$i : k(\mathfrak{P}) \hookrightarrow A_\mathfrak{P}/\mathfrak{c}(A_\mathfrak{P}/R_\mathfrak{z})$，今 $k(\mathfrak{P}) \supsetneqq k(\mathfrak{z})$ とする。ある A の元 ξ で $\bar{\xi} \notin k(\mathfrak{z})$ となるものが存在する。とくに $\bar{\xi} \in \mathrm{Im}\, i$ としてよい。$\mathrm{ch}\, k = 0$ なので，R 係数の多項式 $f(x)$ で $f(\xi) \in \mathfrak{c}(A_\mathfrak{P}/R_\mathfrak{z}) \subseteq R_\mathfrak{z}$ かつ $\overline{f'}(\bar{\xi}) \neq 0$ となるものがある。このとき $f'(\xi) \notin \mathfrak{P}A_\mathfrak{P}$ 故 $f'(\xi)$ は unit，そして $f(\xi) \in R_\mathfrak{z}$ である。

そこで $0 = df(\xi) = f'(\xi)d\xi$ であるが，$\overline{f'(\xi)} \neq 0$ であるから，$f'(\xi)$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の unit なので，$d\xi = 0$ を得る。

∴ $\xi \in R$ となり，矛盾，そこで $k(P) = k(\xi)$ を得る。

(iii) を示す。このために $d = \dim R$ に関する帰納法を用いる。

$d = 1$ のとき，(iii) は (ii) と同じである。よって成立。

$d > 1$ として，$\dim R < d$ であれば定理は正しいとする。

(iii) を示すために，A/R を更に細分する必要がある。

$\mathrm{Ass}_R \Omega_R(A) = \{ P \cap R \mid P \in \mathrm{Ass}_A \Omega_R(A) \}$ であるから，

$\mathrm{Ass}_A \Omega_R(A) = \{ \mathfrak{P} \}$，よって $\Omega_R(A) \otimes_A A_P = \Omega_{R_\xi}(A_{\mathfrak{p}})$ は Artin A-加群，従って有限の長さをもつ，それを

$$M_0 = \Omega_{R_\xi}(A_P) \supsetneqq M_1 \supsetneqq \cdots\cdots \supsetneqq M_t \supsetneqq M_{t+1} = (0)$$

$$M_i / M_{i+1} \cong A_P / pA_{\mathfrak{p}}$$ とする。

$d_\xi : A \longrightarrow \Omega_{R_\xi}(A_P)$ において，$d_\xi^{-1}(M_i) = C_i$ とおけば，C_i は A と R の中間環であって，$\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P} \cap C_i$ とおけば，$\mathfrak{P}_i = \mathrm{Ann}_{C_i} \Omega_{C_i}(C_{i-1})$ である。よって，

$d_{i-1} : C_{i-1} \longrightarrow \Omega_{C_i}(C_{i-1})$ において，$d_{i-1}^{-1}(0) = C_i$

そして，C_{i-1}/C_i が cusp type である事がわかればよい。

従って我々は更に $\mathrm{Ann}_A \Omega_R(A) = \mathfrak{P}$ と仮定してよい。
このとき，$\mathfrak{P} \ni \alpha, \beta$ とすれば $d(\alpha\beta) = \alpha d\beta + \beta d\alpha = 0$
故 $\mathfrak{P}^2 \subseteq R$，∴ $\mathfrak{P}^2 \subseteq \mathfrak{f}(A/R)$ である。
さて簡単のために，$\bar{A} = A/\mathfrak{P}$，$\bar{R} = R/\mathfrak{p}$ とおく。

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^2 \arrow[r, "\delta"] & \Omega_R(A) \otimes_A \bar{A} \arrow[r] & \Omega_{\bar{R}}(\bar{A}) \arrow[r] & 0 \ (\text{exact}) \\
 & A \arrow[u] \arrow[r] & \bar{A} \arrow[u, "\bar{d}"'] &
\end{tikzcd}$$

において，$\bar{d}^{-1}(0) = \bar{R}$ である事を示す。今 $\bar{A} \ni \bar{\alpha}$ で $\bar{d}(\bar{\alpha}) = 0$ とすれば，$\bar{d}(\alpha) \in \delta(\mathfrak{P}/\mathfrak{P}^2)$ 故 $\beta \in \mathfrak{P}$ で $\overline{d(\alpha)} = \delta(\beta)$，ところが $\mathfrak{P}^2 \subseteq R$ 故 $d(\mathfrak{P}^2) = (0)$，よって $d(\alpha - \beta) = 0$ を得る。∴ $\alpha - \beta \in R$，
$\alpha - \beta = a$ とおけば $\beta \in \mathfrak{P}$ 故 $\bar{\alpha} = \bar{a} \in \bar{R}$ を得る。
$\bar{A}$ と $\bar{R}$ は双有理かつ $\bar{A}$ は $\bar{R}$-加群として有限生成であるから，帰納法の仮定より $\bar{R}$ は $\bar{A}$ の中で cusp type である。よって (iii) が示された。

系　D を A の R 上の derivation とする。$D^{-1}(0) = B$ は A と R の中間環であるが，B は A の中で cusp type。

$d : A \longrightarrow \Omega_R(A)$ で $B_1 = d^{-1}(0)$ とおき，順次 $B_2, \cdots\cdots$ を作っていくと，B_n は A の中で cusp type である。このときある自然数 d で $B_d = R$ となるためには R が A の中で cusp type でなければならないが，ある自然数 d で $B_d = B_{d+1}$，つまり B_d / R は unramified となるかというと，一般的には成立しない。

[1] M. Manaresi, Some properties of weakly normal varieties, Nagoya Math. J., 77 (1980), 61 - 74.

[2] C. Traverso, Seminormality and Picard group, Ann. Scuola Norm. Sup. Piza 24 (1970), 585 - 595.

[3] K. Yoshida, On birational integral extension of rings and prime ideals of depth one, Japan. J. Math. 8 (1982), 49 - 70.

[4] J. Lipman, Stable ideals and Arf rings, Amer. J. Math., 93 (1971), 649 - 685.

[5] P. Samuel, Les epimorphismes d'anneaux, Séminaire d'algebres commutative dirige par P. Samuel, Secretariat Math., Paris, 1968.